

1. Prelazne vjerovatnoće za Markovljev binarni izvor II reda date su u tabeli:

$P(0 00) = P(1 11)$	0.25
$P(0 01) = P(0 10)$	0.35

Nacrtati dijagram stanja ovog izvora i napisati jednačine iz kojih se mogu odrediti stacionarne vjerovatnoće stanja.

Rješenje:

$$P(0|00) = P(1|11) = 0,25$$

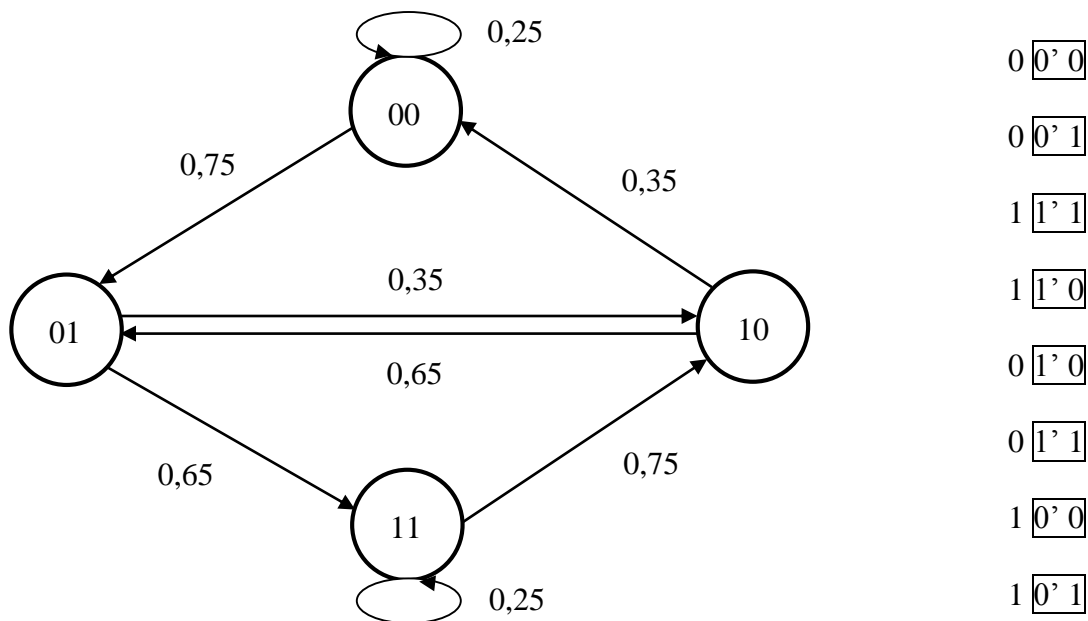
$$P(0|01) = P(0|10) = 0,35$$

$$P(0|00) = 0,25 \rightarrow P(1|00) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(1|11) = 0,25 \rightarrow P(0|11) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(0|01) = 0,35 \rightarrow P(1|01) = 1 - 0,35 = 0,65$$

$$P(0|10) = 0,35 \rightarrow P(1|10) = 1 - 0,35 = 0,65$$



Broj prelaznih vjerovatnoća $n^{m+1} = 2^3 = 8$

$$P(00) = P(00)P(0|00) + P(10)P(0|10)$$

$$P(01) = P(00)P(1|00) + P(10)P(1|10)$$

$$P(10) = P(11)P(0|11) + P(01)P(0|01)$$

$$P(11) = P(11)P(1|11) + P(01)P(1|01)$$

Četvrta jednačina može biti:

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$$

2. Diskretni izvor bez memorije emituje četiri simbola, čije su vjerovatnoće emitovanja $P(S_i) = \{0.125, 0.25, 0.125, 0.5\}$. Ako je izvršeno treće proširenje izvora, odrediti entropiju proširenog izvora.

Rješenje:

$$P(S_i) = \{0.125, 0.25, 0.125, 0.5\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\}$$

Treće proširenje $\rightarrow n=3$

$$H(S^n) = nH(S) \Rightarrow H(S^3) = 3H(S)$$

$$H(S) = -\frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{4}(-2) - \frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{4}(-2) = \frac{14}{8}$$

$$H(S^3) = 3H(S) = 3 \frac{14}{8}$$

3. Binarni izvor $S = \{0,1\}$ emituje poruku od deset bita. Vjerovatnoća emitovanja nule je 0.65. Odrediti tipičnu sekvencu i njenu vjerovatnoću.

Rješenje:

$$S = \{0,1\}$$

$$P(0) = q = 0,65$$

$$P(1) = p = 1 - 0,65 = 0,35$$

$n = 10$ - dužina sekvence

k - broj jedinica

Napomena: $0! = 1$

sekvenca sadrži	broj kombinacija	vjerovatnoća pojedinačne kombinacije	totalna vjerovatnoća (br.kom x vjer. poj. kom.)
0 jedinica	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{1 \cdot 10!} = 1$	$q^{10} = 0.135$	0,135
1 jedinica	$\frac{10!}{1 \cdot 9!} = 10$	$q^9 p = 0.0072$	0,072
2 jedinice	$\frac{10!}{2!8!} = 45$	$q^8 p^2 = 0.0039$	0,1755
3 jedinice	$\frac{10!}{3!7!} = 120$	$q^7 p^3 = 0.0021$	0,252
4 jedinice	$\frac{10!}{4!6!} = 210$	$q^6 p^4 = 0,0011$	0,231
5 jedinica	$\frac{10!}{5!5!} = 252$	$q^5 p^5 = 0,00060941$	0,153
6 jedinica	$\frac{10!}{6!4!} = 210$	$q^4 p^6 = 0,00032814$	0,0689
7 jedinica	$\frac{10!}{7!3!} = 120$	$q^3 p^7 = 0,00017669$	0,0212
8 jedinica	$\frac{10!}{8!2!} = 45$	$q^2 p^8 = 0,000095142$	0,00428
9 jedinica	$\frac{10!}{9!1!} = 10$	$q^1 p^9 = 0,000051230$	0,000512
10 jedinica	$\frac{10!}{10!1} = 1$	$p^{10} = 0,000027585$	0,0002758

Entropija pojedinačnog bita je:

$$H(S) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) = 0,9341 \text{ bit / simb}$$

Pošto se sekvenca sastoji od 10 bita entropija proširenog izvora je:

$$n \cdot H(S) = 10 \cdot 0.9341 \text{ bit / simb} = 9,341 \text{ bit / simb}$$

Vjerovatnoća pojavljivanja tipične sekvence približno je jednaka:

$$2^{-n \cdot H(S)} = 2^{-9,341} = 0.0015$$

Iz tabele slijedi da je to sekvenca koja sadrži 4 jedinice (ima ih 210).

4. Izvornu listu čini sedam simbola, čije su vjerovatnoće emitovanja date $P(S_i) = \{0.2, 0.1, 0.1, 0.3, 0.2, 0.05, 0.05\}$. Hafmenovim postupkom kodirati dati izvor ako je kodna lista $X = \{a, b, c\}$ i odrediti srednju dužinu kodne riječi.

Rješenje:

S4	0,3	b	0,3	b	*0,5	a
S1	0,2	c	0,2	c	0,3	b
S5	0,2	aa	0,2*	aa	0,2	c
S2	0,1	ac	•0,2*	ab		
S3	0,1•	aba	0,1*	ac		
S6	0,05•	abb				
S7	0,05•	abc				

Prvo redukovanje

$$g - (r-1) \leq r$$

$$7 - (3-1) \leq 3$$

$5 \leq 3$ ne zadovoljava

$$g - (r-1) \leq r$$

$$5 - (3-1) \leq 3$$

$3 \leq 3$ zadovoljava (redukuju se tri simbola)

Drugo redukovanje

$$g - (r-1) \leq r$$

$$5 - (3-1) \leq 3$$

$3 \leq 3$ zadovoljava (redukuju se tri simbola)

$$L = 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.05 = 1.7 \text{ (bita / simbolu)}$$

5. Izvornu listu čini osam simbola, čije su vjerovatnoće emitovanja date

$$P(S_i) = \left\{ \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right\}$$

- Hafmenovim binarnim kodom kodirati dati izvor, odrediti srednju dužinu kodne riječi i entropiju izvora.
- Šenon-Fanoovim postupkom kodirati dati izvor i odrediti srednju dužinu kodne riječi.
-

Rješenje:

- Hafmenov binarni kod

$$r = 2 = \{0,1\}$$

S1	$\frac{2}{10}$	01	$\frac{2}{10}$	01	$\frac{2}{10}$	01	$\frac{2}{10}$	01	$\frac{4}{10}$	1	$\frac{4}{10}$	1	$\frac{6}{10}$	0
S4	$\frac{2}{10}$	000	$\frac{2}{10}$	000	$\frac{2}{10}$	000	$\frac{2}{10}$	000	$\frac{2}{10}$	01	$\frac{4}{10}$	00	$\frac{4}{10}$	1
S2	$\frac{1}{10}$	110	$\frac{2}{10}$	001	$\frac{2}{10}$	001	$\frac{2}{10}$	001	$\frac{2}{10}$	000	$\frac{2}{10}$	01		
S3	$\frac{1}{10}$	111	$\frac{1}{10}$	110	$\frac{2}{10}$	10	$\frac{2}{10}$	10	$\frac{2}{10}$	001				
S5	$\frac{1}{10}$	100	$\frac{1}{10}$	111	$\frac{1}{10}$	110	$\frac{2}{10}$	11						
S6	$\frac{1}{10}$	101	$\frac{1}{10}$	100	$\frac{1}{10}$	111								
S7	$\frac{1}{10}$	0010	$\frac{1}{10}$	101										
S8	$\frac{1}{10}$	0011												

$$L = 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{30}{10} = 3 \text{ (bita / simbolu)}$$

- Šenon-Fanoov kod

S1	$\frac{2}{10}$	0	00	00	00
S4	$\frac{2}{10}$	0	01	010	010
S2	$\frac{1}{10}$	0	01	011	011
S3	$\frac{1}{10}$	1	10	100	100
S5	$\frac{1}{10}$	1	10	101	101
S6	$\frac{1}{10}$	1	11	110	1100
S7	$\frac{1}{10}$	1	11	110	1101
S8	$\frac{1}{10}$	1	11	111	111

$$L = 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{30}{10} = 3 \text{ (bita / simbolu)}$$

6. Neka je dat alfabet izvora $\{x, y, z\}$ i neka koder u rječniku ima alfabet izvora. LZ postupkom kodirati sekvencu: $x z y y x x y y z z y z y x x x z$

Rješenje:

xz | yy | xx | yyz | zy | zyx | xxz

1	x	
2	y	
3	z	
4	xz	(1,z)
5	yy	(2,y)
6	xx	(1,x)
7	yyz	(5,z)
8	zy	(3,y)
9	zyx	(8,x)
10	xxz	(6,z)

7. Kodirati LZ postupkom sekvencu $aacbbdadddacbbaaaaabbcbda$, ako koder u rječniku nema alfabet izvora.

Rješenje:

a | b | c | bb | d | ad | dd | ac | bba | aa | aab | bc | da

0	NULL	
1	a	(0,a)
2	b	(0,b)
3	c	(0,c)
4	bb	(2,b)
5	d	(0,d)
6	ad	(1,d)
7	dd	(5,d)
8	ac	(1,c)
9	bba	(4,a)
10	aa	(1,a)
11	aab	(10,b)
12	bc	(2,c)
13	da	(5,a)

8. Kodirati RLE kodom sekvencu bbbbbbbcccbccbbcccccbbcc

Rješenje:

$$\frac{\text{bbbbbb}}{(b,7)} \quad \frac{\text{ccc}}{(c,3)} \quad \frac{\text{bb}}{(b,2)} \quad \frac{\text{cc}}{(c,2)} \quad \frac{\text{bbbb}}{(b,4)} \quad \frac{\text{cccc}}{(c,4)} \quad \frac{\text{bb}}{(b,2)} \quad \frac{\text{cc}}{(c,2)}$$

9. Kodirati diferencijalnim kodom sekvencu 18 17 18 19 20 20 20 19 19 18 17 17

Rješenje:

18	17	18	19	20	20	20	19	19	18	17	17
↓											
18	-1	1	1	1	0	0	-1	0	-1	-1	0